Józef Drewniak, Tomasz Kądziołka, Jerzy Kopeć

Dwie metody wyznaczania przełożenia kinematycznego sprzężonych przekładni obiegowych z kołami stożkowymi

JEL: L62 DOI: 10.24136/atest.2019.033
Data zgłoszenia: 15.12.2018 Data akceptacji: 08.02.2019

W artykule przedstawiona zostanie analiza kinematyki sprzężonych przekładni planetarnych z kołami walcowymi i stożkowymi z wykorzystaniem metody grafów konturowych. Metoda ta była już stosowana do analizy kinematyki mechanizmów dźwigniowych oraz zębatych przekładni planetarnych zwykłych i sprzężonych z kołami walcowymi. Wyprowadzono także wzór na przełożenie kinematyczne wykorzystując wzór Willisa, dzięki czemu istnieje możliwość zweryfikowania metody grafów konturowych.

Wstęp

Metoda równań konturowych, zwana także metodą grafów konturowych została dokładnie przedstawiona w książce Dan B. Marghitu [1]. Jej zalety wykazano w pracach dotyczących analizy struktury, kinematyki i statyki przekładni planetarnych, biplanetarnych i mechanizmów dźwigniowych zamkniętych [2-7]. Oczywiście do analizy kinematyki mechanizmów, w tym przekładni planetarnych wykorzystuje się także inne metody grafowe. Dokładny przegląd tych prac przedstawiono w artykule [8]. Tytuły przykładowych prac zamieszczono w bibliografii [9-11].

W niniejszym referacie przedstawia się kinematykę szeregowo-równoległej, czyli sprzężonej przekładni planetarnej. Sposób analizy takiej przekładni omawia się po raz pierwszy z wykorzystaniem którejkolwiek z metod wykorzystujących grafy.

Przekładnia analizowana, której schemat przedstawiono na rysunku 1 składa się z czterech kół walcowych 1, 2, 3 i 4 tworzących przekładnię o osiach stałych oraz trzech kół stożkowych 5, 6 i 7 tworzących przekładnię planetarną. Koła 5 i 7 są kołami słonecznymi, natomiast koła 6 – satelitami. Przyjęto liczbę satelitów $s = 3$. Koła 5 i 7 mają różne średnice, tak więc jarzmo 7 nie jest prostopadłe do osi wału kół słonecznych, a satelity pracują w ułożeniu skośnym. Dzięki takiemu nieklasycznemu układowi możliwe jest uzyskanie większego przełożenia kinematycznego.

Dane geometryczne przekładni przedstawiają się następująco:
liczby zębów kół: $z_1 = 18$, $z_2 = 69$, $z_3 = 38$, $z_4 = 49$, $z_5 = 21$, $z_6 = 60$, $z_7 = 42$,
moduły kół walcowych: $m_1 = \ldots = m_4 = m = 4\ mm$,
średnie moduły kół stożkowych o zębach prostych:

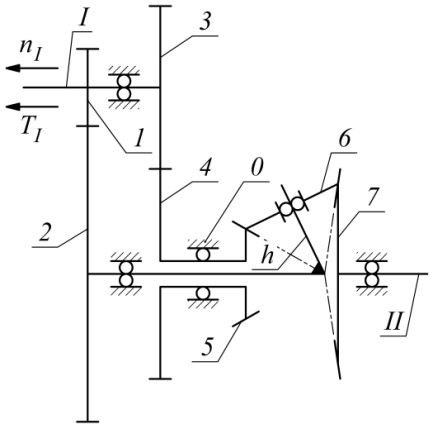
$$m_{mt5} = m_{mt6} = m_{mt7} = m_{mt} = 4\ mm\ .$$

Stopień ruchliwości analizowanej przekładni wynosi:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1\ , \qquad (1)$$

gdzie:
$n = 5$ – liczba elementów ruchomych,
$p_4 = 5$ – liczba par 5 klasy (łożyska toczne),
$p_5 = 4$ – liczba par 4 klasy (zazębienia).

Wartość stopnia ruchliwości $W = 1$ oznacza, że do obliczeń kinematyki każdego z elementów przekładni należy znać tylko wartość prędkości obrotowej jednego z trzech wałów (wejściowego związanego z kołami 1 i 3, wyjściowego związanego z kołem 7 lub jarzma h związanego z kołem 2). W tym przypadku przyjęto daną wartość prędkości obrotowej n_1 wału wejściowego z kołami zębatymi 1 i 3.



Rys. 1. Schemat analizowanej sprzężonej przekładni obiegowej

1 Wykorzystanie wzoru Willisa

1.1 Geometria przekładni

1.1.1 Wykorzystanie wzoru Willisa

Zgodnie z definicją przełożenie kinematyczne przekładni walcowo-stożkowej wynosi:

$$i_{I,II} = \left(\frac{n_I}{n_7}\right) = \left(\frac{\omega_I}{\omega_7}\right). \qquad (2)$$

gdzie:
$n_I = n_1 = n_3$ - dana prędkość obrotowa wału wejściowego z kołami zębatymi 1 i 3 (Rys. 1),
$n_{II} = n_7$ - poszukiwana prędkość obrotowa wału wyjściowego z kołem stożkowym 7 (Rys. 1).

Przełożenie kinematyczne $i_{1,2}$ oraz $i_{3,4}$ dwóch równoległych łańcuchów kinematycznych, odpowiednio złożonych z kół $1, 2$ oraz $3, 4$ wyznacza się oddzielnie z następujących wzorów:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_I}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}\ , \qquad (3)$$

$$i_{3,4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_I}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}\ . \qquad (4)$$

Z zależności powyższych wyznacza się prędkości kątowe ω_2 i ω_4, odpowiednio kół walcowych 2 i 4 oraz jarzma h i koła stożkowego 5, gdyż $\omega_h = \omega_2$ oraz $\omega_4 = \omega_5$.
Tak więc prędkości kątowe ω_h oraz ω_5 można wyrazić w funkcji danej wejściowej prędkości kątowej ω_1 ($\omega_1 = \omega_3 = \omega_I$):

$$\omega_h = \omega_2 = -\omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2}. \tag{5}$$

oraz

$$\omega_5 = \omega_4 = -\omega_1 \cdot \frac{z_3}{z_4}. \tag{6}$$

Przełożenie kinematyczne stożkowej przekładni planetarnej (Rys. 1) wyznaczyć można ze wzoru Willisa. W tym celu nadaje się jej prędkość obrotową równą $-n_h$ i następnie wyznacza przełożenie bazowe przekładni $i^h_{5,7}$:

$$i^h_{5,7} = \left(\frac{\omega^h_5}{\omega^h_7}\right) = \frac{\omega_5 - \omega_h}{\omega_7 - \omega_h}, \tag{7}$$

gdzie:

$i^h_{5,7}$ - bazowe przełożenie kinematyczne stożkowej przekładni od koła słonecznego 5 do koła słonecznego 7 (poprzez satelitę 6), czyli wyznaczane dla względnych prędkości kątowych kół 5 i 7 względem jarzma h,

$\omega^h_j = \omega_j - \omega_h$ - względne prędkości kątowe kół zębatych stożkowej przekładni planetarnej odpowiednio o numerach $j = 5,6,7$.

Kinematyka przekładni planetarnej rozpatrywanej dla prędkości względnych kół $5,6$ i 7 względem jarzma h jest tożsama z kinematyką przekładni stożkowej o osiach stałych. Tak więc bazowe przełożenie kinematyczne jest równe przełożeniu przekładni o osiach stałych i może być wyznaczone ze znanego wzoru:

$$i^h_{5,7} = \left(\frac{z_6}{z_5}\right) \cdot \left(-\frac{z_7}{z_6}\right) = -\frac{z_7}{z_5}, \tag{8}$$

gdzie założono, że przełożenie współpracujących kół stożkowych zbiegających się w punkcie zazębienia jest dodatnie (para kół 5 i 6) i ujemne dla rozbiegających się (para kół 6 i 7).

Porównując prawe strony równań (7) i (8)

$$\frac{\omega_5 - \omega_h}{\omega_7 - \omega_h} = -\frac{z_7}{z_5}, \tag{9}$$

wyznacza się wzór na prędkość kątową koła wyjściowego $\omega_7 = \omega_{II}$ w funkcji prędkości ω_5 oraz ω_h:

$$\omega_7 = \frac{z_5}{z_7} \cdot \left[-\omega_5 + \omega_h \cdot \left(1 + \frac{z_7}{z_5}\right)\right]. \tag{10}$$

Ostatecznie, po uwzględnieniu zależności (5) i (6), wyjściowa prędkość kątowa ω_7 oraz całkowite przełożenie kinematyczne przekładni $i_{I,II}$ wynoszą:

$$\omega_7 = \frac{z_5}{z_7} \cdot \omega_1 \cdot \left[\frac{z_3}{z_4} - \left(1 + \frac{z_7}{z_5}\right) \cdot \frac{z_1}{z_2}\right], \tag{11}$$

$$i_{I,II} = \frac{\omega_I}{\omega_7} = \frac{z_7}{z_5 \cdot \left(\frac{z_3}{z_4} - \left(1 + \frac{z_7}{z_5}\right) \cdot \frac{z_1}{z_2}\right)}. \tag{12}$$

Dla danej wartości wejściowej prędkości obrotowej $n_I = 300\,obr/min$ oraz przyjętych wartości liczb zębów kół zębatych wartość przełożenia kinematycznego przekładni $i_{I,II}$ oraz prędkości kątowa ω_7 i obrotowa n_7 koła 7 wynoszą:

$$i_{I,II} = \frac{42}{21 \cdot \left(\frac{38}{49} - \left(1 + \frac{42}{21}\right) \cdot \frac{18}{69}\right)} = -281{,}75. \tag{13}$$

$$\omega_7 = \frac{21}{42} \cdot 10 \cdot \pi \cdot \left[\frac{38}{49} - \left(1 + \frac{42}{21}\right) \cdot \frac{18}{69}\right] = -0{,}1115\,rad/s, \tag{14a}$$

$$\omega_7 = \frac{\omega_I}{i_{I,II}} = \frac{\frac{\pi \cdot n_I}{30}}{i_{I,II}} = \frac{31{,}416}{-281{,}75} = 0{,}112\,rad/s. \tag{14b}$$

$$n_7 = \frac{n_I}{i_{I,II}} = \frac{300}{-281{,}75} = -1{,}065\,obr/min. \tag{14c}$$

Wartość przełożenia kinematycznego $i_{I,II} < -1$, czyli analizowana przekładnia jest przekładnią redukcyjną o kierunku obrotów wału wyjściowego przeciwnym do kierunku obrotów wału wejściowego.

2 Wykorzystanie metody grafów konturowych

2.1 Geometria przekładni

Drugim sposobem analizy kinematyki przekładni obiegowej będzie metoda grafów konturowych [1]. Zgodnie z tą metodą zależności kinematyczne poszczególnych elementów przekładni obiegowej przedstawiają się następująco:

$$\sum_i \boldsymbol{\omega}_i^{i-1} = \boldsymbol{0}, \tag{15a}$$

$$\sum_i \boldsymbol{r}_{i,i-1} \times \boldsymbol{\omega}_i^{i-1} + \sum_i \boldsymbol{v}_{Ai,i-1} = \boldsymbol{0}, \tag{15b}$$

gdzie:

$\boldsymbol{\omega}_i^{i-1}$ - względna prędkość kątowa elementu i względem elementu $i-1$,

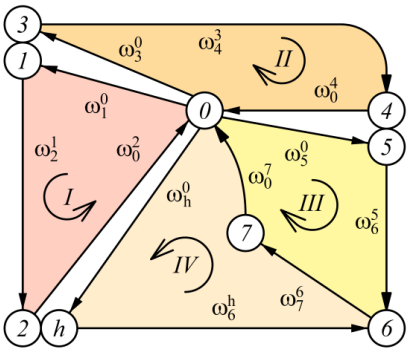
$\boldsymbol{r}_{i,i-1}$ - wektor położenia węzła wspólnego elementów i oraz $i-1$ (dla $i = 1,2,\ldots,p+1$, gdzie p jest całkowitą liczbą elementów),

$\boldsymbol{v}_{Ai,i-1}$ - względna prędkość punktu $A_{i,i}$ elementu i względem punktu $A_{i,i-1}$ elementu $i-1$.

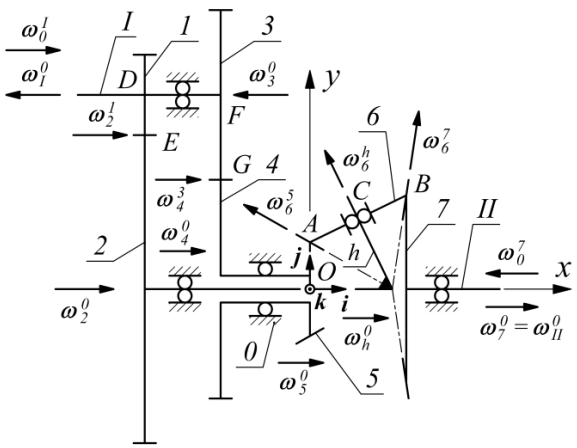
Dla $k = p_4 + p_5 = 9$ węzłów (par kinematycznych) ($p_5 = 5$ par 5. klasy, $p_4 = 4$ par 4. klasy) oraz $p = 6$ elementów (0, $1-3$, $2-h$, $4-5$, 6, 7) istnieje m niezależnych konturów analizowanej przekładni obiegowej (zgodnie z [1]):

$$m = k - p + 1 = 9 - 6 + 1 = 4. \tag{16}$$

Schemat grafowy konturów przedstawiony jest na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat grafowy analizowanej przekładni obiegowej



Rys. 3. Model obliczeniowy - założone wektory prędkości kątowych

Dla pierwszego konturu składającego się z trzech elementów 0, 1 i 2 ułożonych na ścieżce 0, 1, 2, 0 w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (Rys. 2), można napisać następujące równania wektorowe (zgodnie z równaniami (15a i 15b):

$$\boldsymbol{\omega}_1^0 + \boldsymbol{\omega}_2^1 + \boldsymbol{\omega}_0^2 = \boldsymbol{0}\,, \tag{17a}$$

$$\boldsymbol{r}_D \times \boldsymbol{\omega}_1^0 + \boldsymbol{r}_E \times \boldsymbol{\omega}_2^1 = \boldsymbol{0}\,, \tag{17b}$$

gdzie (zgodnie z rysunkiem 3):

$\boldsymbol{\omega}_1^0 = -\omega_1^0 \cdot \boldsymbol{i} = -\omega_I^0 \cdot \boldsymbol{i}$ jest daną bezwzględną prędkością kątową zębnika 1 (czyli względem nieruchomej podstawy 0),

$\boldsymbol{\omega}_0^2 = -\omega_2^0 \cdot \boldsymbol{i}$, ponieważ $\boldsymbol{\omega}_2^0 = -\boldsymbol{\omega}_0^2$ jest nieznaną bezwzględną prędkością kątową koła 2 (czyli wyznaczaną względem podstawy 0),

$\boldsymbol{\omega}_2^1 = \omega_2^1 \cdot \boldsymbol{i}$ jest poszukiwaną względną prędkością kątową koła 2 względem koła 1, czyli:

$$\boldsymbol{\omega}_2^1 = \boldsymbol{\omega}_2^0 - \boldsymbol{\omega}_1^0\,,$$

$\boldsymbol{r}_D$, $\boldsymbol{r}_E$ są wektorami odległości od punktów odpowiednio D i E od punktu O (Rys. 3):

$$\boldsymbol{r}_D = -x_D \cdot \boldsymbol{i} + y_D \cdot \boldsymbol{j}\,, \quad x_D = L_1\,, \quad y_D = r_1 + r_2\,, \quad z_D = 0\,,$$

$$\boldsymbol{r}_E = -x_E \cdot \boldsymbol{i} + y_E \cdot \boldsymbol{j}\,, \quad x_E = L_1\,, \quad y_E = r_2\,, \quad z_E = 0\,,$$

$\omega_I^0 = \omega_1^0$ - dana wartość prędkości kątowej wału wejściowego I,

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ - wzajemnie prostopadłe wersory tworzące układ współrzędnych.

Tak więc równania (17a) i (17b) można zapisać w następującej postaci wektorowej:

$$-\omega_1^0 \cdot \boldsymbol{i} + \omega_2^1 \cdot \boldsymbol{i} - \omega_2^0 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}\,, \tag{18a}$$

$$\left(-x_D \cdot \boldsymbol{i} + y_D \cdot \boldsymbol{j}\right) \times \left(-\omega_1^0\right) \cdot \boldsymbol{i} + \left(-x_E \cdot \boldsymbol{i} + y_E \cdot \boldsymbol{j}\right) \times \omega_2^1 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}\,, \tag{18b}$$

Po poniższym przekształceniu:

$$-\omega_1^0 + \omega_2^1 - \omega_2^0 = 0\,, \tag{19a}$$

$$-y_D \cdot \left(-\omega_1^0\right) \cdot \boldsymbol{k} - y_E \cdot \omega_2^1 \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}\,, \tag{19b}$$

otrzymuje się ostateczną postać równań

$$-\omega_1^0 + \omega_2^1 - \omega_2^0 = 0\,, \tag{20a}$$

$$y_D \cdot \omega_1^0 - y_E \cdot \omega_2^1 = 0\,, \tag{20b}$$

z których wyznacza się prędkości ω_2^1 i $\omega_2^0 = \omega_2$:

$$\omega_2^1 = \frac{y_D}{y_E} \cdot \omega_1^0 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot \omega_1^0 =$$

$$= \frac{18+69}{69} \cdot 10 \cdot \pi = 39{,}611\, rad/s\,. \tag{21a}$$

$$\omega_2^0 = -\omega_1^0 + \omega_2^1 = \omega_1^0 \cdot \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2} - 1\right) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_1^0 = \frac{18}{69} \cdot 10 \cdot \pi = 8{,}196\, rad/s \tag{21b}$$

Zgodnie z rysunkiem 1 zachodzi równość prędkości kątowych:

$$\omega_h^0 = \omega_2^0 = 8{,}195\, rad/s\,.$$

Dla drugiego konturu składającego się z trzech elementów 0, 3 i 4 ułożonych na ścieżce 0, 3, 4, 0 w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, następujące równania mogą być zapisane:

$$\boldsymbol{\omega}_3^0 + \boldsymbol{\omega}_4^3 + \boldsymbol{\omega}_0^4 = \boldsymbol{0}\,, \tag{22a}$$

$$\boldsymbol{r}_F \times \boldsymbol{\omega}_3^0 + \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{\omega}_4^3 = \boldsymbol{0}\,, \tag{22b}$$

gdzie (zgodnie z rysunkiem 3):

$$\boldsymbol{\omega}_3^0 = -\omega_3^0 \cdot \boldsymbol{i} = -\omega_1^0 \cdot \boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{\omega}_4^3 = \omega_4^3 \cdot \boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{\omega}_0^4 = -\omega_4^0 \cdot \boldsymbol{i}\,,$$

$$\boldsymbol{r}_F = -x_F \cdot \boldsymbol{i} + y_F \cdot \boldsymbol{j}\,, \quad x_F = L_2\,, \quad y_F = r_3 + r_4\,, \quad z_F = 0\,,$$

$$\boldsymbol{r}_G = -x_G \cdot \boldsymbol{i} + y_G \cdot \boldsymbol{j}\,, \quad x_G = L_2 \quad y_G = r_4\,, \quad z_G = 0\,.$$

Po poniższych dwóch przekształceniach (23a, b) oraz (24a, b)

$$-\omega_3^0 \cdot \boldsymbol{i} + \omega_4^3 \cdot \boldsymbol{i} - \omega_4^0 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}\,, \tag{23a}$$

$$\left(-x_F \cdot \boldsymbol{i} + y_F \cdot \boldsymbol{j}\right) \times \left(-\omega_3^0\right) \cdot \boldsymbol{i} + \left(-x_G \cdot \boldsymbol{i} + y_G \cdot \boldsymbol{j}\right) \times \omega_4^3 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}\,, \tag{23b}$$

$$-\omega_3^0 + \omega_4^3 - \omega_4^0 = 0\,, \tag{24a}$$

$$-y_F \cdot \left(-\omega_3^0\right) \cdot \boldsymbol{k} - y_G \cdot \omega_4^3 \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}\,, \tag{24b}$$

układ równań (22a, b) przyjmuje ostateczną postać algebraiczną (dla drugiego konturu):

$$-\omega_3^0 + \omega_4^3 - \omega_4^0 = 0\,, \tag{25a}$$

$$y_F \cdot \omega_3^0 - y_G \cdot \omega_4^3 = 0\,, \tag{25b}$$

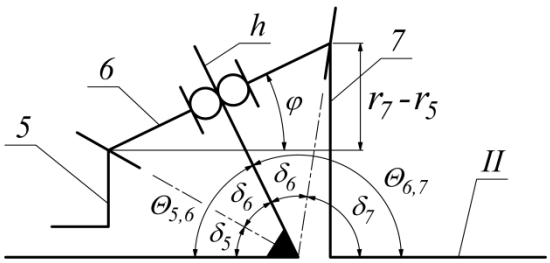
z których wyznacza się wartości ω_4^3 oraz $\omega_4^0 = \omega_4$:

$$\omega_4^3 = \frac{y_F}{y_G} \cdot \omega_3^0 = \frac{r_3 + r_4}{r_4} \cdot \omega_1^0 = \frac{38+49}{49} \cdot 10 \cdot \pi = 55{,}78\, rad/s\,,$$

$$\omega_4^0 = -\omega_3^0 + \omega_4^3 = \omega_3^0 \cdot \left(\frac{r_3 + r_4}{r_4} - 1\right) =$$

$$= \frac{r_3}{r_4} \cdot \omega_1^0 = \frac{38}{49} \cdot 10 \cdot \pi = 24{,}363\, rad/s\,.$$

Zgodnie z rysunkiem 3 wartość $\omega_5^0 = \omega_4^0 = 24{,}363\, rad/s$.



Rys. 4. Kąty określające geometrię kół stożkowych

Dla trzeciego konturu składającego się z czterech elementów 0, 5, 6 i 7 ułożonych na ścieżce 0, 5, 6, 7, 0 w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, następujące równania wektorowe mogą być wygenerowane:

$$\boldsymbol{\omega}_5^0 + \boldsymbol{\omega}_6^5 + \boldsymbol{\omega}_7^6 + \boldsymbol{\omega}_0^7 = \boldsymbol{0}\,, \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{\omega}_6^5 + \boldsymbol{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_7^6 = \boldsymbol{0}\,, \tag{26b}$$

gdzie (zgodnie z rysunkiem 3 oraz 4):

$$\boldsymbol{\omega}_5^0 = \omega_5^0 \cdot \boldsymbol{i} = \omega_4^0 \cdot \boldsymbol{i}\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_0^7 = -\boldsymbol{\omega}_7^0 = -\omega_7^0 \cdot \boldsymbol{i}\,,$$

$$\boldsymbol{\omega}_6^5 = -\left(\omega_6^5 \cdot \cos\delta_5\right)\cdot \boldsymbol{i} + \left(\omega_6^5 \cdot \sin\delta_5\right)\cdot \boldsymbol{j} + 0 \cdot \boldsymbol{k}\,,$$

$$\boldsymbol{\omega}_7^6 = -\boldsymbol{\omega}_6^7 = -\left(\omega_6^7 \cdot \cos\delta_7\right)\cdot \boldsymbol{i} - \left(\omega_6^7 \cdot \sin\delta_7\right)\cdot \boldsymbol{j} + 0 \cdot \boldsymbol{k}\,,$$

$$\boldsymbol{r}_{OA} = x_A \cdot \boldsymbol{i} + y_A \cdot \boldsymbol{j} + z_A \cdot \boldsymbol{k} \quad x_A = 0\,, \quad y_A = r_5\,, \quad z_A = 0\,,$$

$$\boldsymbol{r}_{OB} = x_B \cdot \boldsymbol{i} + y_B \cdot \boldsymbol{j} + z_B \cdot \boldsymbol{k}\,,$$

$$x_B = \sqrt{\left(2r_6\right)^2 - \left(r_7 - r_5\right)^2} = 236{,}296\,mm\,, \quad y_B = r_7\,, \quad z_B = 0\,,$$

$$r_5 = m_{mt} \cdot z_5 = 42\,mm\,, \qquad r_6 = m_{mt} \cdot z_6 = 120\,mm\,,$$

$$r_7 = m_{mt} \cdot z_7 = 84\,mm\,.$$

Po dodatkowym przekształceniu równań (26a, b) otrzymuje się kolejną postać równań wektorowych:

$$\boldsymbol{\omega}_5^0 + \boldsymbol{\omega}_6^5 - \boldsymbol{\omega}_7^7 - \boldsymbol{\omega}_7^0 = \boldsymbol{0}\,, \tag{27a}$$

$$\boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{\omega}_6^5 - \boldsymbol{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_6^7 = \boldsymbol{0}\,. \tag{27b}$$

Równania powyższe można zapisać w postaci ułatwiającej późniejszy zapis algebraiczny:

$$\omega_5^0 \cdot \boldsymbol{i} - \left(\omega_6^5 \cdot \cos\delta_5\right)\cdot \boldsymbol{i} + \left(\omega_6^5 \cdot \sin\delta_5\right)\cdot \boldsymbol{j} -$$
$$-\left(\omega_6^7 \cdot \cos\delta_7\right)\cdot \boldsymbol{i} - \left(\omega_6^7 \cdot \sin\delta_7\right)\cdot \boldsymbol{j} - \omega_7^0 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0} \tag{28a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & y_A & 0 \\ -\omega_6^5 \cdot \cos\delta_5 & \omega_6^5 \cdot \sin\delta_5 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_B & y_B & 0 \\ -\omega_6^7 \cdot \cos\delta_7 & -\omega_6^7 \cdot \sin\delta_7 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}\,, \tag{28b}$$

gdzie równanie macierzowe (28b) zapisane w postaci rozwiniętej przyjmuje postać (28c):

$$\left(y_A \cdot \omega_6^5 \cdot \cos\delta_5 - x_B \cdot \omega_6^7 \cdot \sin\delta_7 + y_B \cdot \omega_6^7 \cdot \cos\delta_7\right)\cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \tag{28c}$$

Po pomnożeniu równania wektorowego (28a) przez $\boldsymbol{i}$ oraz przez $\boldsymbol{j}$ otrzymuje się dwa równania algebraiczne (odpowiednio rzuty wektorów prędkości kątowych na oś x (29a) oraz y (29b) - nadmiarowe):

$$\omega_5^0 - \omega_6^5 \cdot \cos\delta_5 - \omega_6^7 \cdot \cos\delta_7 - \omega_7^0 = 0 \tag{29a}$$

$$\omega_6^5 \cdot \sin\delta_5 - \omega_6^7 \cdot \sin\delta_7 = 0 \tag{29b}$$

Podobnie mnożąc równanie (28c) przez wersor $\boldsymbol{k}$ otrzymuje się trzecie algebraiczne równanie rzutów prędkości obwodowych:

$$y_A \cdot \omega_6^5 \cdot \cos\delta_5 - \omega_6^7 \cdot \left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right) = 0 \tag{29c}$$

Z równań (29c) i (29b) wyznacza się wzory na względne prędkości kątowe ω_6^5 i ω_6^7:

$$\omega_6^5 = \omega_6^7 \cdot \frac{x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7}{y_A \cdot \cos\delta_5}\,, \tag{30a}$$

natomiast z równania (18a) po uwzględnieniu wzoru (30a) równanie:

$$\omega_5^0 - \omega_6^7 \cdot \left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right)}{y_A} + \cos\delta_7\right] - \omega_7^0 = 0\,. \tag{30b}$$

Dla czwartego konturu składającego się z czterech elementów 0, h, 6 i 7 ułożonych na ścieżce 0, h, 6, 7, 0 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (Rys. 2), następujące równania mogą być wyprowadzone:

$$\boldsymbol{\omega}_h^0 + \boldsymbol{\omega}_6^h + \boldsymbol{\omega}_7^6 + \boldsymbol{\omega}_0^7 = \boldsymbol{0}\,, \tag{31a}$$

$$\boldsymbol{r}_{OC} \times \boldsymbol{\omega}_6^h + \boldsymbol{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_7^6 = \boldsymbol{0}\,, \tag{31b}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{r}_{OC} = x_C \cdot \boldsymbol{i} + y_C \cdot \boldsymbol{j} + z_A \cdot \boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_h^0 = \omega_h^0 \cdot \boldsymbol{i}\,,$$

$$\omega_h^0 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_I^0 = \frac{18}{69} \cdot 300 \cdot \frac{\pi}{30} = 8.195\,s^{-1}\,,$$

$$\boldsymbol{\omega}_6^h = -\left(\omega_6^h \cdot \cos\left(\delta_5 + \delta_6\right)\right)\cdot \boldsymbol{i} + \left(\omega_6^h \cdot \sin\left(\delta_5 + \delta_6\right)\right)\cdot \boldsymbol{j}\,,$$

$$x_C = 0{,}5 \cdot \sqrt{\left(2r_6\right)^2 - \left(r_7 - r_5\right)^2} = 118{,}148\,mm\,,$$

$$y_C = \frac{r_5 + r_7}{2} = 63\,mm\,, \quad z_A = 0\,.$$

Po przekształceniu równania (31a, b) przyjmują postać:

$$\boldsymbol{\omega}_h^0 + \boldsymbol{\omega}_6^h - \boldsymbol{\omega}_6^7 - \boldsymbol{\omega}_7^0 = \boldsymbol{0}\,, \tag{32a}$$

$$\boldsymbol{r}_{OC} \times \boldsymbol{\omega}_6^h - \boldsymbol{r}_{OB} \times \boldsymbol{\omega}_6^7 = \boldsymbol{0}\,, \tag{32b}$$

Rozwinięta postać powyższych równań przedstawia się następująco:

$$\omega_h^0 \cdot \boldsymbol{i} - \left(\omega_6^h \cdot \cos\left(\delta_5 + \delta_6\right)\right)\cdot \boldsymbol{i} + \left(\omega_6^h \cdot \sin\left(\delta_5 + \delta_6\right)\right)\cdot \boldsymbol{j} -$$
$$-\left(\omega_6^7 \cdot \cos\delta_7\right)\cdot \boldsymbol{i} - \left(\omega_6^7 \cdot \sin\delta_7\right)\cdot \boldsymbol{j} - \omega_7^0 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0} \tag{33a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_C & y_C & 0 \\ -\omega_6^h \cdot \cos\left(\delta_5 + \delta_6\right) & \omega_6^h \cdot \sin\left(\delta_5 + \delta_6\right) & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_B & y_B & 0 \\ -\omega_6^7 \cdot \cos\delta_7 & -\omega_6^7 \cdot \sin\delta_7 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \qquad (33b)$$

$$\left[\omega_6^h \cdot \left(x_C \cdot \sin\left(\delta_5+\delta_6\right) + y_C \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)\right) + \right.$$

$$\left. +\omega_6^7 \cdot \left(-x_B \cdot \sin\delta_7 + y_B \cdot \cos\delta_7\right)\right] \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \qquad (33c)$$

Po pomnożeniu równania wektorowego (33a) przez $\boldsymbol{i}$ oraz $\boldsymbol{j}$ otrzymuje się dwa równania algebraiczne (odpowiednio rzut na oś x (34a) oraz y (34b) – nadmiarowe):

$$\omega_h^0 - \omega_6^h \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right) - \omega_6^7 \cdot \cos\delta_7 - \omega_7^0 = 0, \qquad (34a)$$

$$\omega_6^h \cdot \cos\frac{\delta_5+\delta_7}{2} - \omega_6^7 \cdot \sin\delta_7 = 0. \qquad (34b)$$

Podobnie mnożąc równanie (33c) przez wersor $\boldsymbol{k}$ otrzymuje się trzecie równanie algebraiczne rzutów prędkości obwodowych:

$$\omega_6^h \cdot \left(x_C \cdot \sin\left(\delta_5+\delta_6\right) + y_C \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)\right) +$$

$$+\omega_6^7 \cdot \left(-x_B \cdot \sin\delta_7 + y_B \cdot \cos\delta_7\right) = 0. \qquad (34c)$$

Z równania (34c) wyznacza się wzór na względną prędkość kątową ω_6^h:

$$\omega_6^h = \omega_6^7 \cdot \frac{x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7}{x_C \cdot \sin\left(\delta_5+\delta_6\right) + y_C \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)}, \qquad (35a)$$

a z równania (34a) po uwzględnieniu wzoru (35a) równanie:

$$\omega_6^7 \cdot \left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right) \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)}{x_C \cdot \sin\left(\delta_5+\delta_6\right) + y_C \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)} + \cos\delta_7\right] +$$

$$+\omega_7^0 = \omega_h^0, \qquad (35b)$$

Podobne równanie otrzymuje się z przekształcenia równania (30b):

$$\omega_6^7 \cdot \left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right)}{y_A} + \cos\delta_7\right] + \omega_7^0 = \omega_5^0 \qquad (35c)$$

W ten sposób uzyskuje się układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi ω_6^7 oraz ω_7^0 (po uwzględnieniu warunków $\omega_5^0 = \omega_4^0$ oraz $\omega_h^0 = \omega_2^0$):

$$\omega_6^7 \cdot \left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right)}{y_A} + \cos\delta_7\right] = \omega_4^0 - \omega_7^0. \qquad (36a)$$

$$\omega_6^7 \cdot \left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right) \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)}{x_C \cdot \sin\left(\delta_5+\delta_6\right) + y_C \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)} + \cos\delta_7\right] =$$

$$= \omega_2^0 - \omega_7^0, \qquad (36b)$$

Trzecią niewiadomą prędkość ω_6^h wyznacza się ze wzoru (35a) mając daną prędkość ω_6^7.

Poszukiwaną wyjściową prędkość kątową ω_7^0 wyznacza się z równania (37):

$$\frac{\left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right)}{y_A} + \cos\delta_7\right]}{\left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right) \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)}{x_C \cdot \sin\left(\delta_5+\delta_6\right) + y_C \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)} + \cos\delta_7\right]} =$$

$$= \frac{\omega_4^0 - \omega_7^0}{\omega_2^0 - \omega_7^0}, \qquad (37)$$

przekształconego następnie do postaci (38):

$$\omega_7^0 = \frac{A \cdot \omega_2^0 - B \cdot \omega_4^0}{A - B}, \qquad (38)$$

$$\omega_7^0 = \frac{2{,}6888 \cdot 8{,}1954 - 0{,}8962 \cdot 24{,}3634}{2{,}6888 - 0{,}8962} = 0{,}1115,$$

gdzie:

$$A = \left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right)}{y_A} + \cos\delta_7\right],$$

$$A = \left[\frac{\left(236{,}296 \cdot 0{,}6177 - 84 \cdot 0{,}7864\right)}{42} + 0{,}7864\right],$$

$$A = 2{,}6885,$$

$$B = \left[\frac{\left(x_B \cdot \sin\delta_7 - y_B \cdot \cos\delta_7\right) \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)}{x_C \cdot \sin\left(\delta_5+\delta_6\right) + y_C \cdot \cos\left(\delta_5+\delta_6\right)} + \cos\delta_7\right],$$

$$B = \left[\frac{\left(236{,}296 \cdot 0{,}6177 - 84 \cdot 0{,}7864\right) \cdot 0{,}1750}{118{,}148 \cdot 0{,}9846 + 63 \cdot 0{,}1750} + 0{,}7864\right],$$

$$B = 0{,}8962.$$

Wartość przełożenia kinematycznego przekładni:

$$i_{I,II} = \frac{\omega_I^0}{\omega_7^0} = \frac{-10 \cdot \pi}{0{,}1115} = -281{,}75. \qquad (39)$$

Ważne obliczenia pomocnicze wartości kątów kół stożkowych (zgodnie z rysunkiem 4):

$$\varphi = \frac{180°}{\pi} \cdot \arcsin\frac{r_7 - r_5}{2 \cdot r_6} = \frac{180°}{\pi} \cdot \arcsin\frac{42}{240} = 10{,}078658°,$$

$$\Theta_{5,6} = 90° - \varphi = 79{,}921342°,$$

$$tg\delta_5 = \frac{\sin\Theta_{5,6}}{i_{5,6} + \cos\Theta_{5,6}} = 0{,}32471044,$$

$$i_{5,6} = \frac{z_6}{z_5} = \frac{60}{21} = 2{,}8571,$$

$$\delta_5 = 17{,}9891546°,$$

$$\delta_6 = \Theta_{5,6} - \delta_5 = 79{,}921° - 17{,}989° = 61{,}9321874°,$$

$$tg\delta_6 = \frac{\sin\Theta_{5,6}}{i_{6,5} + \cos\Theta_{5,6}} = 1{,}875368452,$$

$$i_{6,5} = \frac{z_5}{z_6} = \frac{21}{60} = 0,35\,,$$

$$\delta_6 = 61,9321874°$$

$$\Theta_{6,7} = 180° - \Theta_{5,6} = 100,078658°\,,$$

$$tg\delta_6 = \frac{\sin\Theta_{6,7}}{i_{6,7} + \cos\Theta_{6,7}} = 1,875368439\,,$$

$$i_{6,7} = \frac{z_7}{z_6} = \frac{42}{60} = 0,7\,,$$

$$\delta_6 = 61,93218723°$$

$$tg\delta_7 = \frac{\sin\Theta_{6,7}}{i_{7,6} + \cos\Theta_{6,7}} = 0,785410715$$

$$i_{7,6} = \frac{z_6}{z_7} = \frac{60}{42} = 1,42857143$$

$$\delta_7 = 38,14647078°\,,$$

$$\delta_7 = \Theta_{6,7} - \delta_6 = 100,079° - 61,932° = 38,1464706°\,,$$

$$\cos\delta_5 = \cos 17,989° = 0,951114992\,,$$

$$\sin\delta_7 = \sin 38,147° = 0,617639277\,,$$

$$\cos\delta_7 = \cos 38,147° = 0,786434305\,,$$

$$\sin(\delta_5 + \delta_6) = 0,984568433\,,$$

$$\cos(\delta_5 + \delta_6) = 0,174999998\,.$$

Podsumowanie

W referacie przedstawiono dwie ważne metody analizy kinematyki sprzężonych przekładni obiegowych walcowo-stożkowych. Pierwsza metoda wykorzystująca wzór Willisa jest popularną metodą inżynierską. Natomiast druga metoda zastosowana po raz pierwszy do analizy kinematyki przekładni planetarnych z kołami stożkowymi oparta jest na własnościach grafów konturowych. Można stwierdzić, że w przypadku zastosowania jej do analizy przekładni planetarnych z kołami stożkowymi jest bardziej skomplikowana niż do analizy takich przekładni tylko z kołami walcowymi. Główną przyczyną jest złożona geometria kół stożkowych, zwłaszcza w takim niesymetrycznym układzie jak w analizowanym przykładzie. Drugą przyczyną jest przestrzenny układ przekładni z kołami stożkowymi, podczas gdy przekładnia z kołami walcowymi jest mechanizmem płaskim. Uzyskano zgodne wartości prędkości kątowych oraz przełożenia kinematycznego.

Bibliografia

1. Dan B. Margithu, Kinematic Chains and Machine Components Design. Elsevier Amsterdam 2005
2. J. Drewniak, T. Kądziołka, A. Chronowski: Proces projektowania przestrzennej przekładni biplanetarnej. Autobusy 2017
3. J. Drewniak, S. Zawiślak, Linear-graph and contour-graph-based models of planetary gears. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 48, 2, pp. 415-433, 2010
4. J.Drewniak1, A. Deptuła, T. Kądziołka, S. Zawiślak, Kinematics of biplanetary epicyclic gears. Springer IFToMM CK 2017
5. J. Drewniak, T. Kądziołka and S. Zawiślak, Kinematics of Bevel Biplanetary Gear. Springer International Publishing Switzerland 2018. Advanced Gear Engineering, Mechanisms and Machine Science 289-303.
6. J. Drewniak, P. Garlicka, J. Kopeć and S. Zawiślak, Modified method of the kinematic analysis of planar linkage mechanism for non-stationary motion modes. MTM & Robotics 2016
7. J. Drewniak, J. Kopeć, S. Zawiślak, Kinematical Analysis of Variants of Wind Turbine Drive by Means of Graph. Springer - Graph-Based Modelling In Engineering Pp 81-9. Mechan. Machine Science, 42
8. Hui-Ling Xue, Geng Liu and Xiao-Hui Yang, A review of graph theory application research in gears. . Proc IMechE Part C: J. Mech. Eng. Sci. 2016, Vol. 230(10) 1697–1714
9. J. J. Cervantes-Sánchez,·J. M. Rico-Martínez · C. Panduro-Calvario, A general and systematic framework for the kinematic analysis of complex gear systems. Meccanica (2012) 47:3–21
10. H. Ding, Z. Huang. A new theory for the topological structure analysis of kinematic chains and its applications. Mechanism and Machine Theory 42 (2007) 1264–1279
11. M. Uygurog, Lu And Y. Tokad, Kinematic Analysis of Robotic Bevel-Gear Trains: An Application of Network Model Approach. Meccanica 33: 177–194, 1998.

Two methods of determining the kinematic transmission ratio of coupled circulatory gears with bevel wheels

The paper will present an analysis of kinematics of coupled circulatory gears with cylindrical and bevel wheels with the use of contour graphs method. This method has already been used to analyze the kinematics of lever mechanisms and toothed planetary gears and planetary gears coupled with cylindrical wheels. A formula for kinematic gearing was also derived using Willis' formula, thanks to which it is possible to verify the metadata of contour graphs.

Autorzy:

dr hab. inż. Józef Drewniak
Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

dr inż. Tomasz Kądziołka
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu

dr inż. Jerzy Kopeć
Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej.